数理解析研究所講究録 1306 巻 2003 年 133-141

一般分布に従う要求処理配分問題

大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
Department of Mathematics and Infomation Sciences,
Osaka Prefecture University

1　はじめに

約7年前から施設配置問題に興味を持ち始め、Dreznerの書物[3]を初めとし多くの文献を集め、自分なりにいくつかの問題を発見し論文として発表もしてきた。ところが、これらの理論を例えばスーパーマーケットの店舗拡張、ゴミ処理場や下水処理場の設備、都市を通過する自動車の為の道路、新空港、… といったような現実の配置問題に適用しようとなると、1つの指標にはなるが、ほとんど役に立たないことを経験する。この種の問題を扱うにあたってまず前提となる仮定は人は距離の短い位置にある施設を望む。しかし迷惑施設にあってはできるだけ離れた位置であってほしい。安い値段で品物を購入できる店へ集中するといったことであろう。1929年のHotellingのモデルがその出発点になったことも有名である[4]。実際下水処理場をどこに配置するかといえば、民家から離れ、広い土地があり、河川の側の低い土地というのがその候補であり、多くの場合はほぼ唯一に決まってしまう。スーパーマーケットの新店舗にしても広い駐車場が確保でき、近くに大きな幹線道路がありと、近い距離の店を客は選択するといった原則はくずれてしまい、これも諸種の物理的条件よりほぼ唯一に決まってしまう。あとは土地を確保するための経済的条件やそのほか諸々の政治的条件がこの手の決定問題を複雑にするだけである。

こうやって考えていくと最適配置の数理計画とは、案外に役に立たない分野であることがわかってくる。さらにバブル崩壊に端を発した日本経済の不況は、それまで計画中であった新空港や幹線道路の建設にも疑問を投げかけ、益々新施設配置の計画理論を重要性のない分野へ追いやってしまったと考えるのは、著者達の偏見であろうか。

以上のような考察のもとに、我々は既存の設備の中で目的にかなった設備を選び出し、発生する諸々の要求に対してどのように結びつけ組み合わせるのがシステム全体としての効率を高めることになるのかという観点から個々の問題を取り上げていく。

ここで扱う問題は、次の例から示唆される問題である。日本国内にはかなりの数の国際空港がある。しかし国際空港を持たない大都市の中にはこの事態を不満に思い、新空港の設置を望み、色々と運動しているようであるが、バブル崩壊後の昨今、このような運動には批判の声があたっている。そこで、ここでは日本国内の空港を全部まとめて1つの空港と考え、各空港をその空港内の1つの滑走路とみなし、世界中の各空港からある確率法則に従って到来する飛行機をどのような規準にもとづいて各空港へ割り当て着陸させるかといった問題を提案する。

2　モデル

ある地域にm個の需要や要求を発生する地点とn個の発生した需要や要求を処理する地点が散在している。ここでは、前者を需要点と呼び、後者を施設と呼ぶことにする。需要点と施設はこの地域内の固定された点であるとする。需要点iでは、ある確率過程に従って単位時間当たり平均r_i個の要求が発生する。この需要は全需要点に対して共通の種目に対しての要求となっており、発生の仕方は各需要点に関して独立で

あるものとする($i=1,\ldots,m$)。我々(行動決定者)は各需要点で発生した要求を処理するため、施設jへ送る($j=1,\ldots,n$)。需要点iから施設jへ要求を送るに際してはd_{ij}の時間がかかるものとする。また施設jでは送られてきた各要求を処理するのにやはりある確率法則に従ってW_jの待ち時間とS_jの処理時間が必要となる。

ここで我々の問題は、需要点iで発生するrate r_iの要求をn個の施設の各々にどのように割り当てれば、最も効率良く、すなわち最短時間で処理できるかということである。需要点iで発生した要求をどの割合で施設jへ送るかを考える。そこで、

$x_{ij}=$ 需要点iでrate r_iのある確率過程(計数過程)に従って発生した要求のうち
施設jへ配分されるrate

とすると

$$r_i = x_{i1} + \cdots + x_{in}, \quad x_{i1} \geq 0, \ldots, x_{in} \geq 0, \ i=1,\ldots,m$$

を満足するx_{ij}を決定することが我々の問題となる。そうすると施設jでは

$$x_j = x_{1j} + \cdots + x_{mj}, \quad j=1,\ldots,n$$

を到着率とするある確率過程(計数過程)に従うことになり、各jでの処理時間もまたある確率分布に従うので、要求が発生してから処理を開始するまでの平均所要時間、各jでの平均処理時間、および需要点から施設への移動時間が我々の評価時間ということになる。目的は、このシステム全体で逐次発生する要求をその発生から処理完了までの期待時間を最小にするように配分$x_{ij} \geq 0$、ただし、$i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$を決定することである。

3 一般的定式化

あるシステム内で複数の要求が発生し、これらの要求を複数の施設で処理しようとする場合、システム全体としての処理完了までの時間を最小にするとは、要求の発生地点から処理の施設までの移動時間を含め、待ち時間と処理時間の総和が最も長くかかりそうな需要点と施設の連結を最小時間で完了できるように要求の配分を割り当てることに他ならない。そう考えると我々のモデルは下記のように定式化できる。

$W_j =$ 施設jでの待ち時間を示す確率変数
$S_j =$ 施設jでの処理時間を示す確率変数
$d_{ij} =$ 需要点iから施設jへの移動時間

とすると

$$\min_X \max_{i,j} \{E(W_j + S_j) + u(x_{ij}) d_{ij}\}$$

ここに、$E(Z)$は確率変数Zの期待値を意味し、$u(\cdot)$は

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

であり、またXは制約条件を満足するmn組の配分$x_{ij} \geq 0$全体の集合である($i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$)。制約条件は要求の発生に関しての確率過程と処理に対しての確率分布に応じて適当に付与されるであろうが、現時点のモデルに対しては

$$x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j, \quad j=1,\ldots,n$$
$$x_{i1} + \cdots + x_{in} = r_i, \quad i=1,\ldots,m$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

のみである。そしてx_jは配分x_{ij}によって定められる。

一般にこの種の問題にあっては、$E(W_j+S_j)$は施設jへ割り当てられる要求の総和、すなわちx_jの増加関数として表現できると仮定しても不自然ではない。そこで、我々は

$$h_j(x_j)=E(W_j+S_j)$$

とおき、$h_j(x_j)$はx_jにつき厳密に単調増加と仮定する。また施設jには窓口が複数であっても$h_j(x_j)$の具体的な形が変化するのみでx_jについての増加関数と仮定しても何ら問題が生じない。さらに多くの場合、需要点や施設における要求の定常的な流れ等の条件が加えられるため

$$x_{1j}+\cdots+x_{mj}=x_j<\lambda_j$$

も仮定する。そして後の議論のため

$$R=r_1+\cdots+r_m \ ; \ M=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$$

とおくと

$$R<M$$

が成立する。以上の仮定と条件の下で我々の問題をまとめると、次のような数理計画問題を得ることができる。

$$\min_{x_{ij}}\max_{i,j}[h_i(x_i)+u(x_{ij})d_{ij}] \tag{A}$$

$$\begin{aligned}&\text{subject to}\\&\quad x_{i1}+\cdots+x_{in}=r_i,\\&\quad x_{1j}+\cdots+x_{mj}=x_j<\lambda_j,\\&\quad x_{ij}\geq 0,\\&\quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n,\end{aligned}$$

ここに

$$u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0.\end{cases}$$

これは、非線形のmin max型数理計画問題であり、一般的取り扱いは非常に難しい。

次に、需要点iでの要求の発生がrate r_iのポアソン過程に従い、施設jでの処理がrate λ_jの指数分布に従う場合にあてはめると（窓口が１つ）

$$E(W_j)=\frac{x_j}{\lambda_j(\lambda_j-x_j)},\quad E(S_j)=\frac{1}{\lambda_j}$$

であるから

$$h_j(x_j)=\frac{1}{\lambda_j-x_j}$$

が得られ、$x_j<\lambda_j$はトラフィック条件ということになる。また施設jでの窓口が２つのときはM/M/2待ち行列の理論から

$$E(W_j)=\frac{x_j^2}{\lambda_j(2\lambda_j+x_j)(2\lambda_j-x_j)},\quad E(S_j)=\frac{1}{\lambda_j}$$

より

$$h_j(x_j)=\frac{1}{2\lambda_j+x_j}+\frac{1}{2\lambda_j-x_j}$$

4 移動時間が一定のとき

この問題への出発点として需要点から施設への移動時間がそれらの位置関係とは無関係に与えられる場合、すなわち

$$d_{ij} = d, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$$

となっている場合を考察する。電話回線を利用した情報ネットワークや日本近辺へ到来した航空機と空港の関係等は、このように仮定しても自然さを失わない。この場合、問題(A)の目的関数は

$$\min_{x_{ij}} \max_{i,j}[h_j(x_j) + u(x_{ij})d] = \min_{x_j} \max_{j}[h_j(x_j)] + d \tag{1}$$

となり、x_jを決定する問題に転化される。$h_j(x_j)$はx_jにつき狭義単調増加を仮定していたので

$$h_1(x_1) = \cdots = h_n(x_n) = t \tag{2}$$

とおき、$h_j(x_j) = t$の逆関数を$x_j = h_j^{-1}(t)$とおくと

$$h_1^{-1}(t) + \cdots + h_n^{-1}(t) = R \tag{3}$$

を満たすtが唯1つ存在する。このtをt^*とおき、

$$x_j^* = h_j^{-1}(t^*)$$

とおくと

$$\min_{x_j} \max_{j}[h_j(x_j)] = h_j(x_j^*) = t^* \tag{4}$$

を得る。このとき

$$h_j(x_j^*) = t^* \quad \text{for all } j \tag{5}$$

であり、

$$x_1^* + \cdots + x_n^* = R \tag{6}$$

である。

さて、(3)によってt^*が定まり、したがって$x_1^*, \ldots, x_n^*$が求まると、需要点iから施設jへの配分x_{ij}は

$$\begin{aligned} &x_{i1} + \cdots + x_{in} = r_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ &x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j^*, \quad j = 1, \ldots, n \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

を満足しなければならないから、需要点から施設への単位当たりの輸送費用が一定の輸送問題を解くことにより得られることになる。この解は無数に存在するが、北西隅法による解が簡便な解法といえよう。

5 移動時間が一般の場合

ここでは、各需要点から各施設への移動時間が相互の位置関係によって異なる一般的な場合を考察する。この場合、問題(A)の目的関数は

$$\min_{x_{ij}} \max_{i,j}[h_j(x_j) + u(x_{ij})d_{ij}] = \min_{x_{ij}} \max_{j}[h_j(x_j) + \max_{i} u(x_{ij})d_{ij}]$$

となる。そうすると、もし適当なx_jが定まったとすると、我々の問題は

$$\min_{x_{ij}}\{\max_i u(x_{ij})d_{ij}\} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\text{subject to}\\ &\quad x_{1j}+\cdots+x_{mj}=x_j,\\ &\quad x_{ij}\geq 0,\\ &\quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n\end{aligned}$$

を満足するような"需要点iから施設jへの最大移動時間を最小にするような経路を見つけ出す問題"に転化される。この最短時間経路はすべての$j=1,\ldots,n$に対して見つけられなければならないから、このような経路は輸送問題

$$\min_{x_{ij}}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}d_{ij}x_{ij}\right\} \tag{S}$$

$$\begin{aligned}&\text{subject to}\\ &\quad x_{i1}+\cdots+x_{in}=r_i,\quad i=1,\ldots,m\\ &\quad x_{1j}+\cdots+x_{mj}=x_j,\quad j=1,\ldots,n\\ &\quad x_{ij}\geq 0,\quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n\end{aligned}$$

を解くことによって得られる。さらに問題(S)の解は、施設jへ配分される要求の総量が定まったと仮定した場合の、需要点iから施設jへの最適配分量x_{ij}をも与えてくれることになる。

そうすると我々にとって残された問題は、求められた$h_j(x_j)$に対応する問題(A)を満足する適当なx_jを定めることとなる。ここで後の議論のため、需要点全体の集合をDで、施設全体の集合をFで、すなわち

$$D=\{1,\ldots,m\}\ ;\ F=\{1,\ldots,n\}$$

で表し、Dの中で$j\in F$への配分を行う需要点全体の集合をD_j、*i.e.*、

$$D_j=\{i\mid x_{ij}>0\},\quad j=1,\ldots,n$$

で表すこととする。x_jが定まると輸送問題(S)により配分x_{ij}が定まるのでこの記号の導入は便利である。そうすると

$$x_j=\sum_{i\in D_j}x_{ij},\quad j=1,\ldots,n$$

となる。さらに実行可能なD_jに対して

$$\begin{aligned}d_j &= \max_{i\in D_j}d_{ij}\\ &= \max_i u(x_{ij})d_{ij},\quad j=1,\ldots,n\end{aligned}$$

すなわち、施設jへ要求を配分する需要点の中で最長となる距離d_jを定義する。ところで、$k\neq l$に対して$D_k\cap D_l=\phi$になるとは限らない。

こうすると問題(A)は

$$\min_{x_j}\max_j[h_j(x_j)+d_j] \tag{T}$$

$$\begin{aligned}&\text{subject to}\\ &\quad x_1+\cdots+x_n=\textstyle\sum_{i=1}^{m}r_i=R,\\ &\quad x_j\geq 0,\quad j=1,\ldots,n\end{aligned}$$

と変形できる。ただし

$$\sum_{i \in D_j} x_{ij} = x_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = r_i,$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$$

である。

問題 (T) を観察すると、目的関数は d_j を固定すると x_j につき増加関数となっており、また d_j は x_j が定まると、輸送問題 (S) により可能な限り小さく決定されることがわかる。今もし適当な x_j^* と d_j^* が選べて

$$h_1(x_1^*) + d_1^* = h_2(x_2^*) + d_2 = \cdots = h_n(x_n^*) + d_n^*$$

が成立したとすると、この x_j^* が最適解を与えてくれることになる。しかしながら x_j を増加すると $\sum x_{ij} = x_j$ であるから $x_{ij} > 0$ となる i の数も増加し、そのため x_{ij} に対応する d_{ij} も大きな値へ離散的に変化し、結果として d_j が離散的に大きな値へ跳ぶ可能性が生じてくる。x_j を減少させると同様にして d_j がより小さな値の d_{ij} の選択への移行に伴い、減少する可能性も出てくる。そうすると $\sum x_j = R$ であるから別の x_j、*i.e.* x_l が増加し、d_l も大きな値へ離散的に変化する可能性が生ずる。

以上の考察のもとに、最適解は、まず適当な x_j の初期値 x_j^0 を求め、問題 (S) と問題 (T) の部分問題:$h_j(x_j) + d_j =$一定 を交互に反復することにより求めることができる。

6　簡単な例

ここでは、簡単な例として需要点 i での要求の発生が rate r_i のポアソン過程に従い、施設 j での処理が rate λ_j の指数分布に従う場合を扱う。

施設 j での窓口の数が1つの場合

$$h_j(x_j) = \frac{1}{\lambda_j - x_j}$$

であるから、移動時間が一定の場合は

$$\frac{1}{\lambda_j - x_j} = \text{一定} \quad \text{for all } j$$
$$\sum_{i=1}^{m} r_i = R \ ; \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = M$$

より

$$x_j^* = \lambda_j - \frac{M - R}{n}, \quad j = 1, \ldots, n$$

を得る。この x_j^* をもとに

$$x_{i1} + \cdots + x_{in} = r_i,$$
$$x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j^*,$$
$$x_{ij} \geq 0,$$
$$i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$$

を北西隅法によって解けばそれが最適解となる。

次に移動時間が需要点 i と施設 j との位置関係によって異なる数値例を与える（窓口は1つ)。需要点は3点 $(m = 3)$、施設は5施設 $(n = 5)$ である。

$$r_1 = 3, \ r_2 = 4, \ r_3 = 5,$$
$$\lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = 3, \ \lambda_4 = 2, \ \lambda_5 = 3$$

そして移動時間は

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	r_i
1	3	6	7	5	2	3
2	2	8	6	4	6	4
3	8	3	4	3	5	5
λ_j	4	4	3	2	3	

ここに、

$$R = \sum r_i = 12;\ M = \sum \lambda_j = 16$$

で与えられている場合を扱う。

初期設定として、d_{ij}を無視して

$$\frac{1}{\lambda_j - x_j} = \text{一定} \quad \text{for all} \quad j$$

$$\text{ただし} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j = R = 12$$

よりx_j^0を決定する。そうすると

$$x_1^0 = 3.2,\ x_2^0 = 3.2,\ x_3^0 = 2.2,\ x_4^0 = 1.2,\ x_5^0 = 2.2$$

となるから、d_{ij}を輸送費用とみなした輸送問題(S)を解くことにより、

$$\begin{array}{lllll}
x_{11}^0 = 0.8, & x_{12}^0 = 0, & x_{13}^0 = 0, & x_{14}^0 = 0, & x_{15}^0 = 2.2, \\
x_{21}^0 = 2.4, & x_{22}^0 = 0, & x_{23}^0 = 0.4, & x_{24}^0 = 1.2, & x_{25}^0 = 0, \\
x_{31}^0 = 0, & x_{32}^0 = 3.2, & x_{33}^0 = 1.8, & x_{34}^0 = 0, & x_{35}^0 = 0
\end{array}$$

そして

$$\begin{array}{l}
D_1^0 = \{1,2\},\ D_2^0 = \{3\},\ D_3^0 = \{2,3\},\ D_4^0 = \{2\},\ D_5^0 = \{1\} \\
d_1^0 = 3,\ d_2^0 = 3,\ d_3^0 = 6,\ d_4^0 = 4,\ d_5^0 = 2
\end{array}$$

を得る。このとき

$$w^0 = \max_j \left(\frac{1}{\lambda_j - x_j^0} + d_j^0 \right) = 7.35$$

となる。

次に、今求めたd_j^0をもとにして

$$\frac{1}{\lambda_j - x_j} + d_j^0 = \text{一定} \quad \text{for all} \quad j,$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_j = 12$$

よりx_j^1を決定する。そうすると

$$x_1^1 \approx 3.71,\ x_2^1 \approx 3.71,\ x_3^1 \approx 0.23,\ x_4^1 \approx 1.56,\ x_5^1 \approx 2.77$$

前段と同様にして、輸送問題(S)を解いて

$$\begin{array}{lllll} x_{11}^1 = 0.23, & x_{12}^1 = 0, & x_{13}^1 = 0, & x_{14}^1 = 0, & x_{15}^1 = 2.77, \\ x_{21}^1 = 3.48, & x_{22}^1 = 0, & x_{23}^1 = 0, & x_{24}^1 = 0.52, & x_{25}^1 = 0, \\ x_{31}^1 = 0, & x_{32}^1 = 3.71, & x_{33}^1 = 0.23, & x_{34}^1 = 1.06, & x_{35}^1 = 0 \end{array}$$

および

$$D_1^1 = \{1,2\},\ D_2^1 = \{3\},\ D_3^1 = \{3\},\ D_4^1 = \{2,3\},\ D_5^1 = \{1\}$$

したがって

$$d_1^1 = 3,\ d_2^1 = 3,\ d_3^1 = 4,\ d_4^1 = 3,\ d_5^1 = 2$$

を得る。

前段と同様に、上記で求めたd_j^1をもとにして

$$\frac{1}{\lambda_j - x_j} + d_j^1 = \text{一定} \quad \text{for all} \quad j,$$

$$\sum x_j = 12$$

によりx_j^2を決定する。そうすると

$$x_1^2 \approx 3.37,\ x_2^2 \approx 3.37,\ x_3^2 \approx 1.26,\ x_4^2 \approx 1.37,\ x_5^2 \approx 2.63$$

再び輸送問題 (S) を解いて

$$\begin{array}{lllll} x_{11}^2 = 0.37, & x_{12}^2 = 0, & x_{13}^2 = 0, & x_{14}^2 = 0, & x_{15}^2 = 0, \\ x_{21}^2 = 3.00, & x_{22}^2 = 0, & x_{23}^2 = 0, & x_{24}^2 = 1.00, & x_{25}^2 = 0, \\ x_{31}^2 = 0, & x_{32}^2 = 3.37, & x_{33}^2 = 1.26, & x_{34}^2 = 0.37, & x_{35}^2 = 2.63 \end{array}$$

したがって

$$D_1^2 = \{1,2\},\ D_2^2 = \{3\},\ D_3^2 = \{3\},\ D_4^2 = \{2,3\},\ D_5^2 = \{1\}$$

および

$$d_1^2 = 3,\ d_2^2 = 3,\ d_3^2 = 4,\ d_4^2 = 3,\ d_5^2 = 2$$

を得る。この結果を観察すると

$$d_j^1 = d_j^2 \quad \text{for all } j$$

となっている。この結果、今上で求めたx_{ij}^2がこの例の最適割り当てとなっていることがわかる。このとき

$$v^* = \frac{1}{\lambda_j - x_j^2} + d_j^2 \approx 4.57$$

が最適期待時間となる。

次に施設jでの窓口の数が２の場合を考えると

$$h_j(x_j) = \frac{1}{2\lambda_j + x_j} + \frac{1}{2\lambda_j - x_j}$$

であるから

$$h_j(x_j) = t$$

より

$$x_j = \sqrt{4\lambda_j^2 - \frac{1}{t}}$$

を得る。従って

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{4\lambda_j^2 - \frac{1}{t}} = R$$

の解をt^*とするとx_j^*が計算できる。この例からもわかるように移動時間が一定の場合も数値的方法に頼らなければならない。

参考文献

[1] Berman, O. and Larson, R. (1985) Optimal 2-Facility Network Districting in the Presence of Queuing, Transpotation Science, Vol.19, pp.261-277.

[2] Cooper, R.B. (1990) Queuing Theory. In Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol.2, D.P. Heyman and M.J. Sobel (eds). North-Holland, New York.

[3] Drezner (Editor). (1997) Facility Location: A Survey of Applications and Methods. Springer; New York.

[4] Hotelling, H. (1929) Stability in Competition, The Economic Journal, Vol.30, pp.41-57.